

БУДІВНИЦТВО

УДК 624.012.45

DOI <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2020.2-2/32>**Азізов Т.Н.**

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Орлова О.М.

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

ВИЗНАЧЕННЯ ВЗАЄМНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ БЕРЕГІВ НОРМАЛЬНОЇ ТРІЩИНИ ПРИ КРУЧЕННІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДВОТАВРОВОГО ПЕРЕРІЗУ

Наведено методика визначення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини елементів двотаврового перерізу при крученні. Показано, що натепер під час реального проєктування залізобетонних конструкцій (у тому числі при використанні відомих у всьому світі програм типу *Ansys*, *Lira* та інших) не враховується факт істотного впливу нормальних тріщин на зміну крутильних жорсткостей залізобетонних елементів. Показано, що розрахунок міцності й жорсткості при крученні залізобетонних елементів із нормальними тріщинами містить три етапи. На першому етапі визначається взаємне переміщення берегів нормальної тріщини; на другому етапі визначається поперечна сила в поздовжній арматурі; на третьому етапі визначається міцність і жорсткість елемента з нормальними тріщинами. Розглянуто, що основною та найскладнішою задачею є визначення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини. Складність завдання полягає в тому, що крутий момент з одного блоку на інший передається через частину поперечного перерізу, що своєю чергою призводить до непридатності формул теорії пружності, в яких передбачається, що дотичні напруження розподілені по всьому торцевому перерізу. Через те, що крутий момент передається через частину без тріщин, розрахунок проводиться умовним розсіченням двотаврового перерізу на рівні вершини нормальної тріщини на два таврових елемента. По лінії розсічення діятимуть невідомі погонні дотичні сили й погонні згинальні моменти. Для визначення цих невідомих функцій з умов сумісності деформацій виведено систему двох диференціальних рівнянь другого порядку. Показаний спосіб рішення системи за допомогою розкладання невідомих функцій в ряди Фур'є, які швидко збігаються. Після визначення невідомих зусиль обчислення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини не представляє труднощів. Зроблено порівняння результатів розрахунків за розробленою методикою з результатами, отриманими моделюванням у програмі *Lira* із застосуванням об'ємних скінчених елементів. Показано добрий збіг результатів. Схарактеризовано, що методика, будучи досить точною, набагато простіша й менш трудомістка в порівнянні з розрахунком із застосуванням об'ємних скінчених елементів. Наведені перспективи досліджень, які стосуються рішення системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: крутильна жорсткість, нагельна сила, двотавровий переріз, умови сумісності, диференціальне рівняння, ряди Фур'є, теорія пружності, опір матеріалів.

Аналіз досліджень і постановка задачі. У залізобетонних елементах наявність різних тріщин веде до зміни їхніх жорсткостей при згині й крученні. У залізобетонних елементах при відносно невеликих крутильних моментах просторові тріщини кручення не виникають. Наприклад, в ребристих плитах перекриття в момент, коли нормальні тріщини розкриті досить широко, просторові тріщини кручення відсутні. Водночас перерозподіл навантаження між суміжними ребрами,

а також між окремими збірними елементами перекриття залежить не тільки від згинальної, але й від крутильної жорсткості ребер [3; 4; 8].

Наявні методики визначення жорсткості на кручення [5; 6; 7] стосуються тільки залізобетонних елементів із просторовими (спіральними) тріщинами, хоча експериментальними дослідженнями встановлений істотний вплив нормальних тріщин на крутильну жорсткість залізобетонних елементів [3; 8]. При використанні в проєктуванні реальних

споруд загальновідомих програм типу Ansys, Ліра й інших також не враховується зміна крутильних жорсткостей стрижневих елементів від наявності в них нормальних тріщин, що погіршує точність визначення зусиль у конструкціях будівель і споруд.

Вважається загальноприйнятим, що міцність залізобетонних елементів при крученні практично не залежить від кількості поздовжньої арматури [7], хоча теоретичні й експериментальні дослідження авторів [1; 3; 8; 10] показують, що при наявності нормальних тріщин міцність залізобетонного елемента при крученні істотно залежить від кількості поздовжньої арматури.

Відомо, що основним завданням розрахунку жорсткості й міцності при крученні є визначення взаємного переміщення блоків залізобетонного елемента, відокремлених нормальною тріщиною [1; 2]. Це завдання ускладнюється тим, що крутий момент передається через частину перетину залізобетонного елемента (через стиснуту від згину зону й поздовжню арматуру), що своєю чергою призводить до непридатності формул теорії пружності, в яких передбачається, що дотичні напруження розподілені по всьому торцевому перерізу.

Аналіз літератури показує, що натеper у практичних розрахунках залізобетонних стрижневих елементів під час дії на них крутих моментів не враховується фактор впливу нормальних тріщин на зміну жорсткості й міцності при крученні таких елементів. Розрахунок міцності й жорсткості при крученні залізобетонних елементів із нормальними тріщинами містить три етапи. На першому етапі визначається взаємне переміщення берегів нормальної тріщини з умовно розсіченою поздовжньою арматурою; на другому етапі визначається поперечна сила в поздовжній арматурі; на третьому етапі визначається міцність і жорсткість елемента з нормальними тріщинами. Відомо [1; 2], що для визначення жорсткості при крученні залізобетонного елемента з нормальними тріщинами треба умовно розрізати поздовжню арматуру й визначити взаємне переміщення берегів нормальної тріщини. Після цього задача визначення жорсткості й міцності при крученні елемента з нормальними тріщинами не викликає труднощів. Нині задача визначення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини для елементів прямокутного перерізу вирішена [1; 2; 8]. Однак велика кількість залізобетонних елементів мають переріз у вигляді двотавру.

З огляду на вищесказане, **метою статті** є розроблення методики визначення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини в елементах двотаврового перерізу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо залізобетонний елемент двотаврового перетину з нормальними тріщинами. При крученні залізобетонного елемента з нормальними тріщинами крутий момент із блоку А на блок В передається через зону x над нормальною тріщиною та поздовжню арматуру (рис. 1).

У результаті дії крутного моменту в поздовжній арматурі елемента виникає сумарна поперечна сила Q (рис. 2), яка підлягає визначенню.

Через наявність нормальної тріщини краї тріщини отримують взаємне переміщення Δ_{tot} . Очевидно, що загальне переміщення точки С відносно точки С' (див. рис. 2) при крученні елемента буде складатися з переміщення від кручення блоку В і переміщення Δ_{tot} в тріщині. І чим більше величина Δ_{tot} , тим більше жорсткість елемента з тріщиною буде відрізнятися від жорсткості елемента без тріщини.

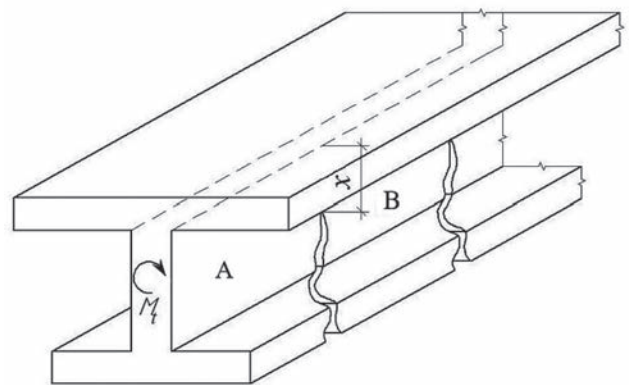


Рис. 1. Схема залізобетонного елемента з нормальними тріщинами, завантаженого крутним моментом

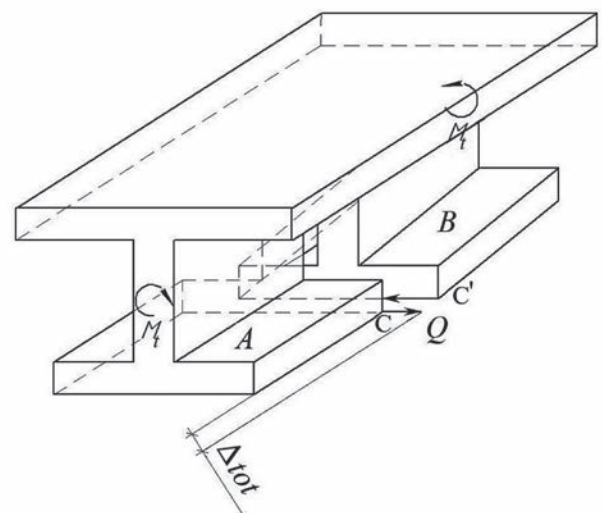


Рис. 2. Схема для визначення нагельної сили в арматурі при взаємному повороті двох блоків, відокремлених тріщиною

Величина поперечної (нагельної) сили Q в арматурі не відома. Якщо визначити цю нагельну силу, то визначення величини зміщення берегів нормальної тріщини Δ_{tot} , а, отже, й жорсткості елемента при крученні не складе труднощів [1]. Для визначення нагельної сили Q слід подумки розсікти її в перерізі з нормальною тріщиною та розглянути умови спільності деформацій у місці умовного розсічення [1; 2]. Після розтину поздовжньої арматури основним і найскладнішим завданням є визначення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини. Складність завдання полягає в тому, що крутний момент з одного блоку на інший передається через частину поперечного перерізу. Схема передачі крутного моменту для двотаврового перерізу показана на рис. 3. Частина перерізу, через яку передається крутний момент, на рис. 3 заштрихована.

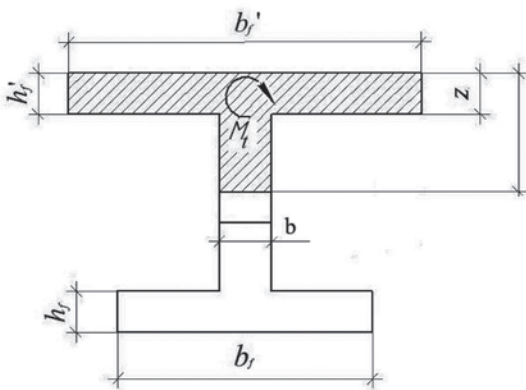


Рис. 3. Схема передачі крутного моменту через стиснуту (від згину) зону бетону

Використання класичних формул теорії пружності для кручення в такому випадку неприйнятно, тому що в них передбачається, що крутний момент становлять дотичні напруження, розподілені по всьому торцевому перерізу [9]. Ускладнену цим фактором задачу можна вирішити різними способами, в тому числі за допомогою моделювання елемента об'ємними скінченими елементами. Але така задача вельми трудомістка, особливо у випадках, коли такі розрахунки треба проводити багато разів із різними розмірами поперечного перерізу при варіантному проектуванні. Розглянемо наближений, але простий спосіб. Будемо розглядати один блок між нормальними тріщинами. Розрахунок будемо вести подібно методу лінійних скінчених елементів, основні положення якого розроблені Т.Н. Азізовим [2; 3]. З огляду на те, що стінка двотаврової балки, як правило, має невелику товщину, будемо умовно вважати, що двотавровий перетин може бути представлено у

виділі набору трьох пластин (верхня та нижня полиці й стінка). Нехай у стрижні двотаврового перетину є нормальні тріщини, як показано на рис. 4, з відстанню між тріщинами l , висота тріщини дорівнює h_{cr} .

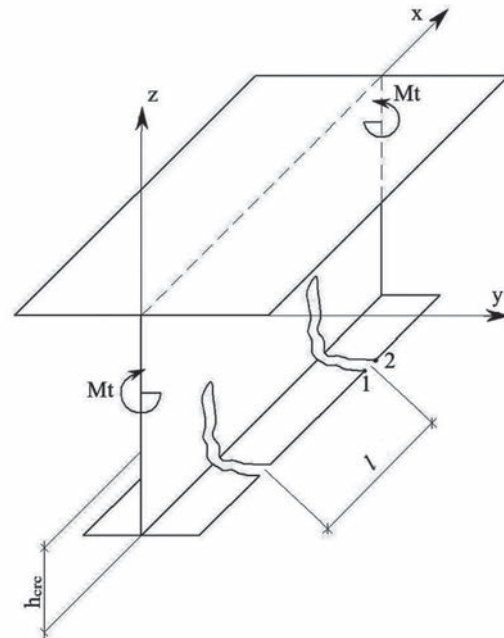


Рис. 4. Схема елемента двотаврового перерізу з нормальними тріщинами

Завдяки тому, що крутний момент передається через частину бетону без тріщин (див. рис.3), для розрахунку, слідуючи подібно методиці [2], розсічемо елемент площиною XOY на рівні вершини нормальної тріщини на два таврових елемента. По лінії розсічення діятимуть погонні дотичні сили $\tau(x)$ і погонні згинальні моменти $m(x)$ (рис. 5).

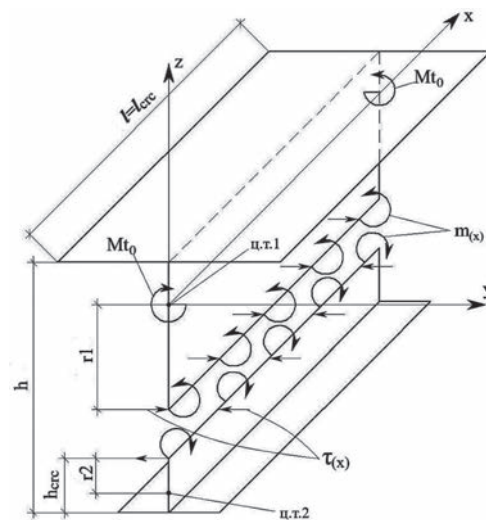


Рис. 5. Схема розділення двотаврового стрижня на два таврових

Для визначення цих погонних невідомих сил слід подібно [2] скласти умови спільності деформацій по лінії розтину, тобто умови рівності горизонтальних переміщень (уздовж осі Y на рис. 5) й кутів повороту відносно осі X для верхнього й нижнього таврових елементів. Розглянемо окремо кожну умову.

Горизонтальні переміщення верхнього тавра. Переміщення вправо будемо вважати позитивними, вліво – негативними.

1. Горизонтальні переміщення від крутіння зовнішнім моментом Mt_0 , дотичними силами $\tau(x)$, моментами $m(x)$. Схема деформації перетину показана на рис. 6.

Горизонтальне переміщення Δ дорівнює:

$$\Delta = \varphi \cdot r_1, \quad (1)$$

де φ – абсолютний кут закручування стрижня (див. рис. 6); r_1 – відстань від лінії розрізу до центра ваги верхнього тавра.

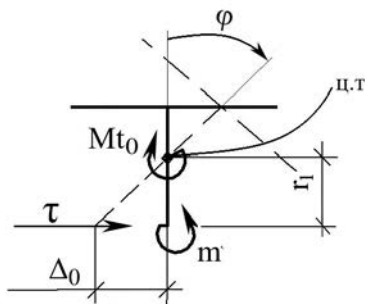


Рис. 6. Схема деформації перерізу при крутінні верхнього тавра

Диференціюючи один раз вираз (1) і з огляду на те, що відомо з теорії крутіння [10], маємо таку формулу:

$$\theta = \varphi' = \frac{M_t}{GJ}, \quad (2)$$

де $M_t = M_t(x)$ – сумарний крутний момент від початку координат до даної точки з координатою x ; GJ – крутильна жорсткість, отримуємо для верхнього стрижня:

$$\Delta_1' = -\frac{Mt_0}{GJ_1} r_1 + \frac{T \cdot r_1}{GJ_1} r_1 + \frac{Mt}{GJ_1} r_1, \quad (3)$$

У виразі (3) позначено: $T = T(x)$, $Mt = Mt(x)$ – відповідно сумарна дотична сила й сумарний момент, пов'язані з погонною дотичною силою $\tau(x)$ і з погонним моментом $m(x)$ диференціальними залежностями:

$$T'(x) = \tau(x); Mt'(x) = m(x), \quad (4)$$

2. Горизонтальне переміщення від згину стінки відсіченого тавра дотичними силами $\tau(x)$ і погонними моментами $m(x)$.

Схема деформування стрижня в цьому випадку показана на рис. 7.

Горизонтальні переміщення від дотичної сили τ (рис. 7, а) і від моменту m (рис. 7, б) визначаються за відомими формулами опору матеріалів [10]:

$$\Delta_\tau = \frac{\tau \cdot r r_1^3}{3 \cdot EJ}; \Delta_m = \frac{m \cdot r r_1^2}{2 \cdot EJ}, \quad (5)$$

де EJ – згинальна жорсткість стрижня. У нашому випадку ця жорсткість дорівнює жорсткості стрижня з висотою перерізу, яка дорівнює товщині стінки, й шириною, що дорівнює одиниці; $r r_1$ – відстань від лінії розрізу до низу верхньої полиці двотавру (вважаємо, що стінка згинається як стрижень, закріплений у верхній полиці).

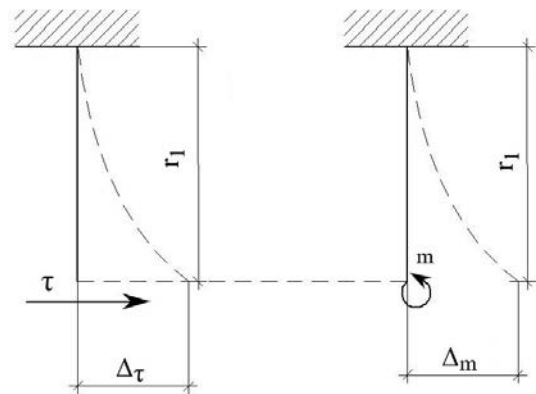


Рис. 7. Схема деформування стінки тавру від сил $\tau(x)$ і $m(x)$

Диференціюючи один раз вираз (5) і з огляду на диференціальні залежності (4), отримуємо вирази для похідних горизонтальних переміщень, отриманих у результаті дії сил T і M_t :

$$\Delta_1^I = \frac{T \cdot r r_1^3}{3 \cdot EJ} + \frac{M_t \cdot r r_1^2}{2 \cdot EJ}, \quad (6)$$

Сумарне переміщення (вірніше похідну від переміщення) в горизонтальному напрямку від крутіння верхнього тавра й місцевого згину стінки отримуємо додаванням виразів (3) і (6):

$$\Delta_1^I = -\frac{Mt_0}{GJ_1} r_1 + \frac{T \cdot r_1}{GJ_1} r_1 + \frac{Mt}{GJ_1} r_1 + \frac{T \cdot r r_1^3}{3 \cdot EJ} + \frac{M_t \cdot r r_1^2}{2 \cdot EJ}, \quad (7)$$

Для переміщень нижнього тавра від крутіння аналогічно (3) (рис. 8) і від місцевого згину стінки аналогічно (6) будемо мати:

$$\Delta_2^I = -\frac{T \cdot r_2}{GJ_2} r_2 + \frac{Mt}{GJ_2} r_2 - \frac{T^{II} \cdot r r_2^3}{3 \cdot EJ} + \frac{Mt^{II} \cdot r r_2^2}{2 \cdot EJ}, \quad (8)$$

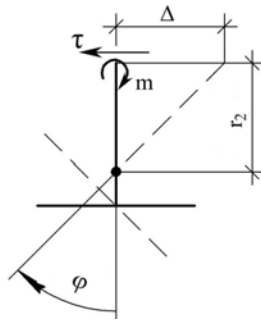


Рис. 8. Схема деформації перерізу при крученні нижнього тавра

Друге рівняння спільності буде рівнянням рівності кутів повороту верхнього й нижнього таврів у місці їхнього умовного розсічення. Ці кути від крутіння будуть також визначатися за відомими формулами опору матеріалів (див. рисунки 6 і 8). Кут повороту за годинниковою стрілкою будемо вважати позитивним, проти годинникової – негативним. Кути повороту від місцевої деформації стінки (див. рис. 7) визначаються за формулами [10]:

$$\varphi_\tau = \frac{\tau \cdot r r_1^2}{2 \cdot EJ}; \quad \varphi_m = \frac{m \cdot r r_1}{EJ}, \quad (9)$$

Діючи аналогічно визначенню похідної горизонтального переміщення, отримаємо для кутів повороту верхнього й нижнього таврів:

Для верхнього тавра:

$$\theta_1 = \varphi_1^I = \frac{Mt_0}{GJ_1} - \frac{T \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{Mt}{GJ_1} - \frac{T^{II} \cdot r r_1^2}{2 \cdot EJ} - \frac{Mt^{II} \cdot r r_1}{EJ}, \quad (10)$$

Для нижнього тавра:

$$\theta_2 = \varphi_2^I = -\frac{T \cdot r_2}{GJ_2} + \frac{Mt}{GJ_2} - \frac{T^{II} \cdot r r_2^2}{2 \cdot EJ} + \frac{Mt^{II} \cdot r r_2}{EJ}, \quad (11)$$

Прирівнюючи переміщення верхнього тавра за (7) із переміщенням нижнього тавра за (8), а також кути повороту верхнього тавра за (10) із кутами повороту нижнього тавра за (11), отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь для визначення невідомих зусиль $T(x)$ і $M_t(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} T \left(\frac{r_1^2}{GJ_1} + \frac{r_2^2}{GJ_2} \right) + Mt \left(\frac{r_1}{GJ_1} - \frac{r_2}{GJ_2} \right) + T^{II} \left(\frac{r r_1^2}{3EJ} + \frac{r r_2^2}{3EJ} \right) + Mt^{II} \left(\frac{r r_1^2}{2EJ} - \frac{r r_2^2}{2EJ} \right) = \frac{Mt_0 r_1}{GJ_1} \\ T \left(-\frac{r_1}{GJ_1} + \frac{r_2}{GJ_2} \right) + Mt \left(-\frac{1}{GJ_1} - \frac{1}{GJ_2} \right) + T^{II} \left(-\frac{r r_1^2}{2EJ} + \frac{r r_2^2}{2EJ} \right) + Mt^{II} \left(-\frac{r r_1}{EJ} - \frac{r r_2}{EJ} \right) = -\frac{Mt_0}{GJ_1} \end{array} \right\}, \quad (12)$$

З системи (12) видно, що при рівних стрижнях вона розпадається на два незалежних диференціальних рівняння другого порядку.

Граничні умови для невідомих (при $X=0$ і $X=L$) будуть мати вигляд:

$T(0)=T(L)=0$; $M_t(0)=M_t(L)=0$, тобто сумарні дотичні сили й сумарні моменти на кінцях розглянутої ділянки (в місцях наявності нормальних тріщин) мають нульові значення. А погонні дотичні сили $\tau(x)$ і погонні моменти $m(x)$, навпаки, мають максимальні значення на границях ділянки. Тобто, $\tau(0)=\tau(L)=max$; $m(0)=m(L)=max$ (рис. 9).

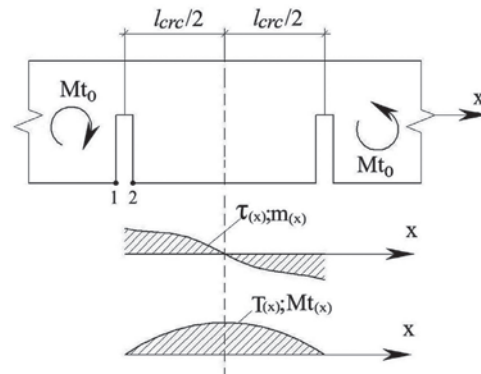


Рис. 9. До визначення граничних умов для невідомих

Ця обставина дозволяє прийняти рішення для невідомих функцій у вигляді розкладання їх в тригонометричні ряди Фур'є по синусах:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} x\right);$$

$$Mt(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} x\right), \quad (13)$$

де T_n і M_n – коефіцієнти Фур'є, що підлягають визначенню.

Для вирішення системи (13) за допомогою розкладання в ряди Фур'є слід і зовнішній крутний момент Mt_0 також розкласти в ряд Фур'є по синусах:

$$Mt_0 = \sum_{n=1}^{\infty} Mt_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} x\right), \quad (14)$$

де коефіцієнти Фур'є Mt_n для випадку постійного моменту $Mt_0=const$ будуть мати вигляд:

$$Mt_n = \frac{2Mt_0}{L\alpha} [(-1)^n - 1], \quad (15)$$

де позначено: $\alpha=\pi \cdot n/L$.

Прийнявши рішення у вигляді (13), розклавши зовнішній момент по (14), підставивши в (12), зробивши диференціювання та скоротивши на $\sin(\alpha \cdot x)$, отримаємо замість системи диференціальних рівнянь систему двох алгебраїчних рівнянь із двома невідомими T_n і M_n :

$$T_n \left(\frac{r_1^2}{GJ_1} + \frac{r_2^2}{GJ_2} + \frac{\alpha^2 r_1^3}{3EJ} + \frac{\alpha^2 r_2^3}{3EJ} \right) + Mn \left(\frac{r_1}{GJ_1} - \frac{r_2}{GJ_2} + \frac{\alpha^2 r_1^2}{2EJ} - \frac{\alpha^2 r_2^2}{2EJ} \right) = \frac{Mt_n r_1}{GJ_1}$$

$$T_n \left(-\frac{r_1}{GJ_1} + \frac{r_2}{GJ_2} - \frac{\alpha^2 r_1^2}{2EJ} + \frac{\alpha^2 r_2^2}{2EJ} \right) + Mn \left(-\frac{1}{GJ_1} - \frac{1}{GJ_2} - \frac{\alpha^2 r_1}{EJ} - \frac{\alpha^2 r_2}{EJ} \right) = \frac{-Mt_n}{GJ_1} \quad (16)$$

Рішення системи (16) дає значення невідомих коефіцієнтів Фур'є:

$$T_n = \eta/\beta; \quad M_n = D/B - T_n \cdot A/B, \quad (17)$$

В виразі (17) прийняті позначення:

$$\beta = A/B - \xi/\gamma; \quad \eta = D/B - \omega/\gamma, \quad (18)$$

Через A позначений множник при T_n в першому рівнянні системи (16), через B – множник при M_n . Через ξ позначений множник при T_n у другому рівнянні; через γ – множник при M_n у другому рівнянні (16). Праві частини системи (16) позначені відповідно через D для першого й через ω для другого.

Знайдені значення коефіцієнтів T_n і M_n для кожного $n=1 \dots \infty$ підставляються у вирази (13), і в результаті отримуємо значення невідомих внутрішніх зусиль $T(x)$ і $M_t(x)$. Для визначення невідомих погонних дотичних сил $\tau(x)$ і погонних моментів $m(x)$ слід продиференціювати вираз (13) один раз. В результаті отримаємо:

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot T_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x);$$

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot M_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x), \quad (19)$$

Після визначення функцій невідомих сил кут повороту кожного тавра можна визначити як кут від зовнішнього моменту Mt_0 і кут від сил, визначених у результаті рішення системи (16). З огляду на те, що зовнішній момент Mt_0 прикладений по торцях стрижня антисиметрично (див. рис. 5), кут повороту в торці перетину буде визначено на довжині $L/2=L_{cr}/2$. Так, кут повороту верхнього стрижня з урахуванням напрямку дії невідомих сил за рис. 5 буде визначено за формулою:

$$\varphi_1 = \frac{Mt_0 l / 2}{GJ_1} - \frac{1}{GJ_1} \int_0^{l/2} [r_1 T(x) + Mt(x)] dx, \quad (20)$$

З врахуванням (13) формула (20) прийме вигляд:

$$\frac{1}{GJ_1} \left[Mt_0 \frac{l}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1 T_n + M_n}{\alpha} \left(\text{Cos} \left(\frac{\pi \cdot n}{2} \right) - 1 \right) \right], \quad (21)$$

Слід зазначити, що ряд у формулі (21) сходиться дуже швидко. Уже при п'яти членах ряду похибка становить не більше двох відсотків.

Після визначення кута повороту φ_1 не важко визначити взаємне переміщення берегів нормальної тріщини (зміщення між точками 1 і 2 на рис. 4 і 9). Цей зсув визначимо наступним чином (див. рис. 4 і 9).

Спочатку визначимо горизонтальне переміщення δ_1 точки 1 (переміщення по осі Y на рис. 4). Для цього кут повороту φ_1 слід помножити на відстань h_1 по вертикалі (по осі Z) від центра ваги верхнього тавра до нижньої грані двотаврового елемента. Ця відстань дорівнює (див. рис. 5) $h_1=r_1+h_{cr}$. Потім визначимо горизонтальне переміщення δ_2 точки 2. Для цього потрібно помножити кут повороту φ_c усього двотаврового перетину на відстань по вертикалі h_c від центра ваги двотаврового елемента до нижньої його грані. Взаємне зміщення $\delta_{1,2}$ дорівнюватиме різниці між δ_1 і δ_2 . Таким чином:

$$\delta_{1-2} = \varphi_1 h_1 - \varphi_c h_c, \quad (22)$$

де φ_1 визначається за (20), а φ_c – за відомою формулою опору матеріалів при відомій жорсткості всього двотавру GJ_{tot} :

$$\varphi_c = \frac{Mt_0 l / 2}{GJ_{tot}}, \quad (23)$$

Таким чином, завдання визначення взаємного зсуву берегів нормальної тріщини з розсіченою арматурою вирішено.

Слід звернути увагу на важливий факт. Жорсткість EJ одиничних стрижнів (в формулах 5 і далі) в отриманій системі диференціальних рівнянь розглядається в припущенні їхньої окремої роботи. Тобто вважаємо, що стрижні не пов'язані один з одним. Насправді під час прикладення дотичної сили τ або моменту m у даній конкретній точці переміщення кінця стінки буде значно меншим. Тому жорсткість умовних стрижнів EJ слід прийняти з деяким коефіцієнтом k_u , що враховує збільшення цієї жорсткості. Коефіцієнт k_u неважко отримати розрахунком пластини з прикладеною в даній точці горизонтальною силою або моментом (як показано на рис. 7) і порівняти це переміщення з переміщенням одиничного стрижня. Водночас для різної довжини стрижня (r_1 на рис. 7) цей коефіцієнт буде різним. Нижче в таблиці наведені значення цього коефіцієнта для прикладу двотаврової

балки з конкретними розмірами. Крім того, переміщення кінця пластини буде залежати від місця положення сили стосовно розташування тріщини (початку координат на рис. 5 і 9). Тому в загальному випадку система диференціальних рівнянь (12) буде системою зі змінними коефіцієнтами, що не дає можливість вирішувати її за допомогою розкладання в ряди Фур'є, як показано вище. Однак, рішення цієї системи зі змінними коефіцієнтами в принципі не становить труднощів і є предметом подальших досліджень.

Порівняння переміщень, отриманих за розробленою методикою, з розрахунками за методом скінчених елементів із використанням об'ємних скінчених елементів наведені в таблиці 1. Двотавровий перетин має наступні розміри: ширина верхньої полиці 300 мм, її товщина 30 мм; ширина нижньої полиці 85 мм, її товщина 45 мм; товщина ребра 30 мм; загальна висота перерізу балки 220 мм; відстань між тріщинами дорівнює 300 мм. Висота тріщини h_{crc} варіюється. Величина k_u

в третій графі таблиці отримана розрахунками пластини з прикладенням горизонтальної сили й моменту, як показано на рис. 7. Водночас залежність цього коефіцієнта від відношення h_{crc}/h , де h – повна висота перерізу балки, має практично лінійний вид, що видно з рис. 10. На цьому рисунку показані залежності $k_u = f(h_{crc}/h)$ для вищезгаданої балки при товщині верхньої полиці 30 і 40 мм.

Як видно з таблиці, при підборі коефіцієнта k_u по залежності на рис. 10 розрахунок за запропонованою методикою практично не відрізняється від розрахунку із застосуванням об'ємних скінчених елементів. Водночас розрахунок за запропонованою методикою набагато простіший у порівнянні з розрахунком із застосуванням об'ємних скінчених елементів.

Після визначення кута повороту верхнього стрижня за (20), а цілого перерізу за (23) обчислення взаємного зміщення берегів нормальної тріщини не становить труднощів. Знаючи величину взаємного зміщення берегів нормальної тріщини,

Таблиця 1

Порівняння переміщень, отриманих за розробленою методикою, з розрахунками за методом скінчених елементів із використанням об'ємних скінчених елементів

h_{crc} мм	φ_{lit} (об'ємні скінчені елементи за програмою Ліра)	φ_t – теорія (за методикою) при значенні k_u		φ_t/φ_{lit}
		k_u	φ_t	
1	2	3	4	5
5	0.0005981	85	0.0006	1.003
7	0.000697	60	0.000694	0.995
9	0.0007738	45	0.000778	1.005
11	0.0008418	35	0.000856	1.017
13	0.000902	30	0.000898	0.995
15	0.000953	25	0.000959	1.006
17	0.0009937	24	0.000979	1.015

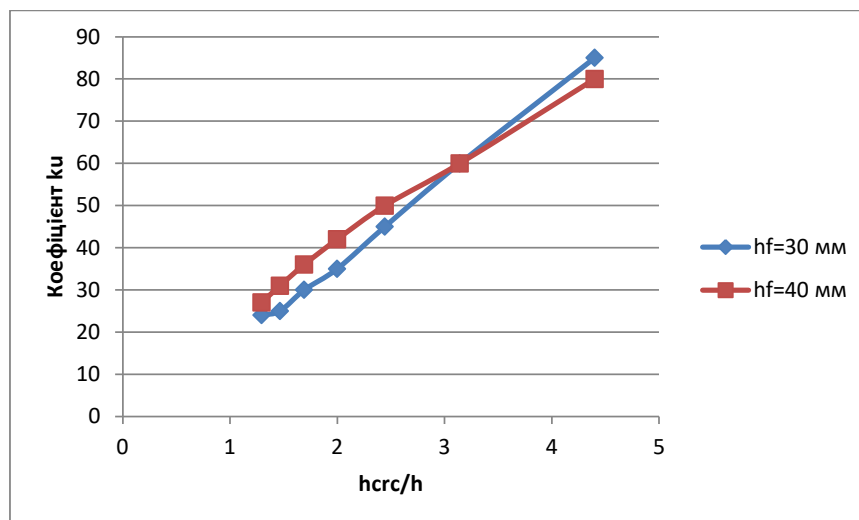


Рис. 10. Залежність коефіцієнта k_u від відношення h_{crc}/h

нагельну силу в поздовжній арматурі, жорсткість і міцність залізобетонного елемента з нормальними тріщинами при крученні можна визначити за методикою [1; 2].

Висновки. Нормальні тріщини впливають на крутильну жорсткість і міцність залізобетонних елементів. У нормах проектування всіх країн відсутня методика розрахунку міцності й жорсткості стрижневих залізобетонних елементів із нормальними тріщинами при крученні. Це пов'язано насамперед із невивченістю питання визначення жорсткості стрижневих залізобетонних елементів із нормальними тріщинами при крученні. При крученні елемента з нормальними тріщинами опір крутному моменту чинить поздовжня арматура й частина бетонного перерізу без тріщин. Для визначення жорсткості при крученні елемента з нормальною тріщиною основним й

найскладнішим завданням є визначення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини з умовно розсіченою арматурою. Після визначення взаємного зсуву берегів тріщини неважко обчислити крутильну жорсткість елемента з нормальними тріщинами, а також міцність елемента з нормальними тріщинами при крученні.

У роботі наведена методика визначення взаємного переміщення берегів нормальної тріщини для елементів двотаврового перерізу. Методика відрізняється своєю простотою та досить точна для практичних розрахунків. Застосування методики дозволяє розраховувати крутильну жорсткість елементів двотаврового перерізу без використання складних програмних комплексів.

Перспективою досліджень є врахування змінних жорсткостей одиничних стрижнів, що моделюють роботу стінки двотаврового перерізу.

Список літератури:

1. Azizov T.N., Melnik O.S. and others. Calculation of reinforced concrete ceilings with normal cracks accounting the Chebyshev approximation. *Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings* : 6 th International Scientific Conference, Kharkiv, April 19–21, 2017. Kharkiv, 2017. P. 1–7.
2. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами. *Дороги і мости* : збірник наукових праць. Вип. 7. Том 1. Київ : ДерждорНДІ, 2007. С. 3–8.
3. Азизов Т.Н. Просторова робота залізобетонних перекриттів. Теорія та методи розрахунку : автореф. дис. ... докт. техн. наук : 05.23.01 ; Полтавський національний технічний університет. Полтава, 2006. 35 с.
4. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчёт несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. Москва : Стройиздат, 1977. 223 с.
5. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. Москва : Стройиздат, 1996. 416 с.
6. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. Москва : Стройиздат, 1976. 208 с.
7. Коуэн Г.Дж. Кручение в обычном и предварительно нажатом железобетоне / пер. с англ. Москва : Изд-во литературы по строительству, 1972. 104 с.
8. Срібняк Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 ; Одеська державна академія будівництва та архітектури. Одеса, 2009. 23 с.
9. Тимошенко С.П. Теория упругости. Москва : ОНТИ, 1934. 451с.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Москва : Наука, 1970. 544 с.

Azizov T.N., Orlova O.M. THE DETERMINATION OF MUTUAL MOVEMENT OF THE BORDERS OF NORMAL CRACK UNDER THE CONDITION OF REINFORCED CONCRETE I-BEAM ELEMENTS TORSION

The method of determining the mutual displacement of the borders of a normal crack of an I-beam element in torsion is presented. It is shown that to date, the actual design of reinforced concrete structures (including the use of known worldwide programs such as Ansys, Lira, etc.) does not take into account the fact that the influence of normal cracks on the change of torsional rigidity of reinforced concrete elements. It is shown that the calculation of tensile strength and tensile strength of reinforced concrete elements with normal cracks includes three steps. In the first stage, the relative displacement of the shores of a normal crack is determined; the second step determines the transverse force in the longitudinal reinforcement; in the third stage, the strength and rigidity of the element with normal cracks are determined. It is shown that the main and the most difficult task is to determine the relative displacement of the borders of a normal crack. The complexity of the problem is that the torque from one block to another is transmitted through part of the cross-section, which in turn leads to the inapplicability of the formulas of the theory of elasticity, in which it is assumed that the tangent stresses are distributed throughout the end section. Since the torque is transmitted through the part without cracks, the calculation is carried out by conditional dissection of an I-beam element at the level of

the top of a normal crack into I-beam elements. Along the line of the intersection will act unknown driving tangent forces and driving bending moments. To determine these unknown functions, a system of two-second order differential equations is derived from the conditions of deformation compatibility. A method for solving a system by decomposing unknown functions into fast Fourier series is shown. After determining the unknown efforts, calculating the relative displacement of the shores of a normal crack is not difficult. A comparison of the results of calculations by the developed method with the results obtained by modeling in the program Lyra using volumetric finite elements. A good match with the results is shown. It has been shown that the technique being sufficiently precise, is much simpler and much less labor-intensive than the calculation with the use of bulk finite elements. Prospects of researches concerning the solution of the system of differential equations with variable coefficients are presented.

Key words: *torsional rigidity, torque force, I-beam element, compatibility conditions, differential equation, Fourier series, elastic theory, material resistance.*